

NOMBRES DE BELL

Deux niveaux de difficulté/longueur : — Piste bleue : questions 1) à 3). — Piste rouge : tout le devoir.

On rappelle que pour tout ensemble fini non vide E , une *partition* de E est un ensemble $\{X_1, \dots, X_p\}$ de parties non vides de E pour lesquelles $E = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_p$. Dans cette définition, l'entier p n'est pas fixé.

On pose $B_0 = 1$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les nombres B_n ainsi définis, n décrivant $\mathbb{N}$, sont appelés les *nombres de Bell*.

1) a) Montrer que pour tout ensemble fini E de cardinal $n \geq 1$, B_n est aussi le nombre de partitions de E . Si vous préférez admettre le résultat, admettez-le !

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.

c) En déduire que $B_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\ln B_n \leq n \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Soient $n \geq 2$ et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Pour toute fonction $f : \llbracket p+1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose :

$$X_k(f) = \{k\} \cup f^{-1}(\{k\}), \quad \text{ainsi que } \pi(f) = \{X_1(f), \dots, X_p(f)\}.$$

a) Montrer que pour toute fonction $f : \llbracket p+1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$, $\pi(f)$ est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

b) Montrer que l'application $f \longmapsto \pi(f)$ est injective de $\llbracket 1, p \rrbracket^{\llbracket p+1, n \rrbracket}$ dans l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et en déduire que $B_n \geq p^{n-p}$. Après coup, cette inégalité reste vraie pour $p = n$.

Pour toutes suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ qui ne s'annulent pas, on dit que $(u_n)_{n \geq 2}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n \geq 2}$ si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ce qu'on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

3) Pour exploiter au mieux la minoration de B_n de la question 2)b), on aimerait savoir pour tout $n \geq 2$ en quel(s) point(s) de $[1, n]$ la fonction $x \longmapsto x^{n-x}$ est maximale. Après passage au logarithme, il est cela dit préférable de s'intéresser à la fonction $x \longmapsto (n-x) \ln x$, qu'on note f_n .

a) Montrer que f_n possède un maximum sur $[1, n]$ pour tout $n \geq 2$ et qu'elle l'atteint en un unique réel x_n .

b) Montrer que pour tout n assez grand : $\frac{n}{\ln n} \leq x_n \leq \frac{2n}{\ln n}$.

c) En déduire que $\ln x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$, puis que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$. Ce résultat justifie l'indication de la question d).

d) On admet que $\left\lfloor \frac{n}{\ln n} \right\rfloor + 1 \leq n$ pour tout $n \geq 3$. En posant $p = \left\lfloor \frac{n}{\ln n} \right\rfloor + 1$ dans le résultat de la question 2)b), montrer l'existence d'une suite $(m_n)_{n \geq 3}$ pour laquelle $\ln B_n \geq n \ln n - n \ln \ln n - m_n$ et $m_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

e) En déduire que : $\ln B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note à présent P_n la fonction polynomiale $x \longmapsto \sum_{k=0}^n B_k \frac{x^k}{k!}$.

a) En étudiant la fonction $x \longmapsto e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$: $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq e^x$.

b) Déduire du résultat de la question 1)b) que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$: $P'_n(x) \leq P_n(x) e^x$.

c) En déduire que la fonction $x \longmapsto P_n(x) e^{-e^x}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que pour tout $x \geq 0$:

$$B_n \frac{x^n}{n!} \leq e^{e^x - 1}.$$

5) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_k^{k+1} \ln t \, dt \geq \ln k$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n!) \leq n \ln n - n + \ln n + 1$.

b) En posant $x = \ln n - \ln \ln n$ dans l'inégalité de la question 4)c), montrer l'existence d'une suite $(M_n)_{n \geq 2}$ pour laquelle : $\ln B_n \leq n \ln n - n \ln \ln n - M_n$ et $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

c) En déduire que : $\ln B_n - n \ln n + n \ln \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$.

Ce résultat est appelé un *développement asymptotique* de $\ln B_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et fournit une approximation de grande précision de $\ln B_n$ lorsque n est grand. D'après 3)e) : $\ln B_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln n$, autrement dit $\frac{\ln B_n}{n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, mais cette limite ne donne aucune estimation de la différence $\ln B_n - n \ln n$. Le résultat de la question 5)c) est justement bien plus précis : $\ln B_n - n \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \ln \ln n$ et il fournit même un terme supplémentaire : $\ln B_n - n \ln n + n \ln \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$.